2D Mønstre

Allan Lind Jensen

April 8, 2019

Contents

1 Isometrier i planen **3**
1.1 Afbildninger . . . 3
1.2 Fem velkendte isometrier . . . 4
1.2.1 Mere viden om de fem isometrier . . . 4
1.2.2 Sammensætning af isometrierne. . . . 5
1.3 Glidespejlinger . . . 5
1.4 Overblik over isometrierne . . . 6
1.5 Regneudtryk for isometrierne . . . 8
1.6 Facts til hjælp i forståelse af mønstrene . . . 9
1.7 Udledning af (1.6) og (1.7) . . . 10

2 Symmetrigruppen for et Mønster **13**
2.1 Præcisering af "symmetri" . . . 13
2.2 Begrænsning til diskrete symmetrigrupper . . . 14
2.3 Rotationer i en diskret symmetrigruppe . . . 15

3 Rosettemønstre **17**
3.1 Overblik over mønstrene . . . 17
3.2 Bevis for at der kun findes disse . . . 18
3.3 Opgaver . . . 18

4 Frisegrupper **20**
4.1 De 7 frisegrupper . . . 20
4.2 Bevis for at der kun findes disse . . . 20
4.2.1 Translationernes generator . . . 20
4.2.2 Begrænsing af rotationer og spejlinger . . . 21
4.2.3 Selve beviset . . . 21
4.3 Opgaver . . . 22

5 tapetgrupper **23**
5.1 De 17 tapetgrupper . . . 23
5.2 Teori . . . 25
5.3 Opgaver . . . 26

Indledning

Disse noter handler om symmetrier i plane mønstre. En symmetri kan for eksempel være en drejning om et punkt eller en forskydning. Derved føres ethvert punkt i planen over i et andet punkt. Det viser sig at man kan opskrive regneudtryk for symmetrierne, hvilket gør det nemmere at arbejde med dem. Første kapitel omhandler regning med disse symmetrier.

Andet kapitel beskriver om den type mønstre, denne tekst beskæftiger sig med, og hvilke der ikke tages med. En del konsekvenser af dette valg forklares og bevises.

Tredje til femte kapitel omhandler hver sin type af mønstre. Frisemønstre kan forskydes i det uendelige men kun i én retning. Tapetmønstre kan forskydes i det uendelige i to dimensioner. Rosettemønstre er møstre uden forskydninger, for eksempel - rosetter, eller mange mønstre på puder.

For hver type af mønster startes med en gennemgang af samtlige typer af symmetrigrupper. For frisegrupperne og tapetgrupperne er gennemgangen outsourcet til wikipædien, da de store sprog har udmærkede oversigter. Dernæst følger et afsnit med teorien bag, og til sidst en række opgaver, så læseren kan træne sin færdighed i at genkende grupperne.

Det er muligt at finde en oversigter over symmetrierne på nettet, google: "planar symmetries". Man kan skaffe sig et overblik over mønstrene ved at læse afsnit 3.1, 4.1 og 5.1. Efter at have trænet sig i at identificere mønstrene med opgaverne i disse noter kan man tage til Al Hambra i Grenada og Alczar Real i Sevilla. Resten af noterne kan derefter studeres efter interesse.

Chapter 1

Isometrier i planen

1.1 Afbildninger

En symmetri ligner en funktion, som imidlertid afbilder et tal over i et tal. I geometri skal man afbilde et punkt over i et punkt. Så taler man om **afbildninger** af planen ind i planen. Man kan for eksempel definere

$$f(x, y) = (x + y, x - y) \ .$$

Så er f en afbildning af planen ind i planen. Punktet $(1, 1)$ afbildes over i $f(1, 1) = (2, 0)$. Man siger at $(2, 0)$ er **billedet** af $(1, 1)$. Ved et **fixpunkt** forstås et punkt, der afbildes over i sig selv. Der gælder altså

$$f(x, y) = (x, y) \ , \text{ fixpunkt.}$$

Med afbildningen ovenfor giver det $(x + y, x - y) = (x, y)$, som resulterer i to ligninger

$$x + y = x \tag{1.1}$$
$$x - y = y \tag{1.2}$$

De har kun løsningen $x = y = 0$. Altså er punktet $(0, 0)$ afbildningens eneste fixpunkt.

Opgave 1 *Regn fixpunktet efter ved at løse ligningerne (1.1) og (1.2). Løs også ligningen $f(x, y) = (r, s)$ med hensyn til x og y.*

Ethvert punkt fremkommer som billede af f. Ved at løse ligningen $f(x, y) = (r, s)$ fås $x = \frac{r+s}{2}$ og $y = \frac{r-s}{2}$. Altså afbildes punktet $\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2}\right)$ i (r, s). (Regn efter at det paser.) Man siger at afbildningen er **surjektiv**, og at den afbilder planen **på** planen - i modsætning til "ind i planen". Det betyder altså at ethvert punkt i planen er billede af et eller andet punkt. Det er det samme som at ligningen

$$f(x, y) = (r, s) \text{ har en lsning for ethver punkt } (r, s) \ . \tag{1.3}$$

Det fremgår også at et punkt (r, s) kun kommer fra ét punkt. Altså har f en **invers afbildning** $f^{-1}(r, s) = \left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2}\right)$, eller med x og y som variable

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) .$$

Man kan udføre afbildningen flere gange efter hinanden. Vi skriver

$$ff(x, y) = f(f(x, y)) = f(x+y, x-y) = (x+y+\ x-y, x+y-(x-y)) = (2x, 2y)$$

for at udføre afbildningen to gange. Man skriver også $f^2(x, y) = ff(x, y)$. Tilsvarende bruger man f^3 og så videre.

1.2 Fem velkendte isometrier

Opgave 2 *Betragt afbildningen $f(x, y) = (x, -y)$.*

a *Afsæt punkterne $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(2, 3)$ og $E(4, 1)$ og deres billeder*

b *Har du et gæt på hvad f gør?*

c *Bestem afbildningens fix-punkter.*

d *Afbildningen er en **isometri** . Det betyder at for ethvert par af punkter P og Q er afstanden mellem deres billeder lig med afstanden mellem punkterne, altså*

$$|f(P)f(Q)| = |PQ| \text{ , definition på } \textbf{isometri} \tag{1.4}$$

Passer det med punkterne $A \ldots E$?

Opgave 3 *Opskriv et regneudtryk for afbildningen der spejler (x, y) i y-aksen. Gennemfør punkterne a, c og d fra opgave 2.*

Opgave 4 *Betragt afbildningen $f(x, y) = (y, x)$. Gennemfør punkterne a...d fra opgave 2.*

Opgave 5 *Betragt afbildningen $f(x, y) = (-y, x)$. Gennemfør punkterne a...d fra opgave 2.*

Opgave 6 *Betragt afbildningen $f(x, y) = (x+2, y)$. Gennemfør punkterne a...d fra opgave 2.*

1.2.1 Mere viden om de fem isometrier

Isometrierne fra section 1.2 navngives:

T	parallelforskydningen, også kaldet en **translation**, opgave 6
D	drejningen, også kaldet en **rotation** på 90° om $(0, 0)$, opgave 5
S_y	spejlingen i linien med ligningen $y = 0$, altså x-aksen, opgave 2
S_x	spejlingen i linien med ligningen $x = 0$, altså y-aksen opgave 3
S_{x-y}	spejlingen i linien med ligningen $x - y = 0$, opgave 4

Det punkt en rotation drejer om, kaldes rotationens **centrum**. Den linie en spejling spejler i, kaldes spejlingens **akse**

Opgave 7 *Find regneudtrykkene for $T^2(x,y)$ og $T^3(x,y)$. Hvilke afbildninger er der tale om?*

Opgave 8 *Find regneudtrykkene for $D^2(x,y)$ og $D^3(x,y)$, $D^4(x,y)$ og $D^5(x,y)$. Hvilke afbildninger er der tale om?*

Opgave 9 *Find regneudtrykkene for $S_x^2(x,y)$ og $S_x^3(x,y)$.*

Opgave 10 *Find regneudtrykkene for $S_y^2(x,y)$ og $S_y^3(x,y)$.*

Opgave 11 *Find regneudtrykkene for $S_{x-y}^2(x,y)$ og $S_{x-y}^3(x,y)$.*

Opgave 12 *Find regneudtrykkene for de inverse afbildninger af samtlige afbildninger i de forrige opgaver i denne sektion.*

Opgave 13 *Gør rede for, at hvis f er en isometri, så er f^n også en isometri. (Vis først påstanden for $n = 2$. Stil eventuelt et induktionsbevis op, så påstanden bevises for ethvert naturligt tal, n.*

1.2.2 Sammensætning af isometrierne.

Opgave 14 *Udregn $TD(x,y) = T(D(x,y))$. Bestem fix-punkter for TD. Har du et gæt på hvad TD er for en isometri?*

Opgave 15 *Samme Spørgsmål som i opgave 14 om afbildningen DT.*

Opgave 16 *Samme Spørgsmål som i opgave 14 om afbildningen DS_y.*

Opgave 17 *Samme Spørgsmål som i opgave 14 om afbildningen S_yD.*

Opgave 18 *Samme Spørgsmål som i opgave 14 om afbildningerne S_xS_y og S_yS_x.*

Ved **sammensætningen** af to isometrier, f og g, forstås afbildningen $f \circ g$ defineret ved

$$(f \circ g)(P) = f(g(P)), \text{ sammensætning af afbildninger.} \tag{1.5}$$

1.3 Glidespejlinger

I afsnit 1.2.2 var der ingen opgaver med sammensætninger af spejlinger og translationen. Måske opdagede du manglen og regnede på dem af egen kraft. Opgaven nedenfor giver et nemmere eksempel.

Opgave 19

a *Opskriv et regneudtryk for $S_{y-1}(x,y)$, hvor S_{y-1} står for spejlingen i linien med ligningen $y - 1 = 0$.*

b *Udregn $G(x,y)$, hvor $G = D_{90^\circ} S_{y-1}$.*

c *Afsæt punkterne $A \ldots D$ fra opgave 1.2 samt deres billeder.*

d *Gæt på hvad G gør.*

e *Beregn fixpunkterne for G.*

f *Afbildningen G har aksen $x - y + 1 = 0$. Afsæt endnu et punkt på aksen, og beregn dets billede. Hvad sker der med punkterne på aksen?*

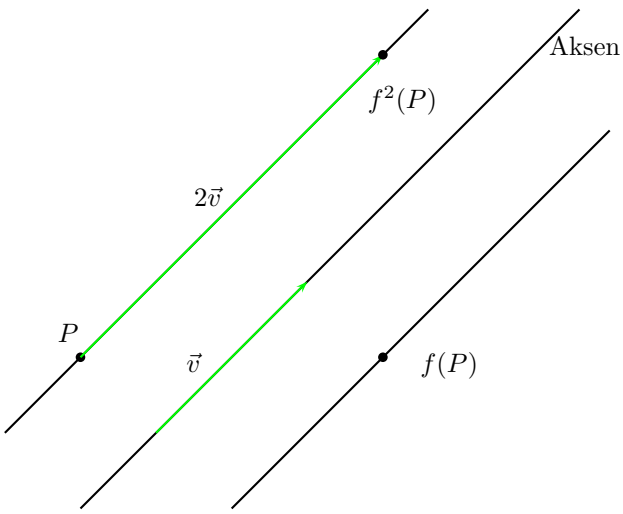
Opgave 19 er et eksempel på en glidespejling. En **glidespejling** kan beskrives som en spejling efterfulgt at en translation (forskydning).

Opgave 20 *Udled et regneudtryk for $T_{(4,0)}S_{y-1}$, hvor $T_{(4,0)}$ er translationen med vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Udled et regneudtryk for $T_{(4,-2)}S_{y-1}$, hvor $T_{(4,-2)}$ er translationen ved vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.*

Opgave 21 *Opskriv et regneudtryk for glidespejlingen med aksen $x - y = 0$ og translationen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

En glidespejling kan skrives på uendelig mange måder som en spejling efterfulgt af en translation. En af spejlingerne skiller sig ud, derved at translationen er parallel med spejlingens akse. Den linie kaldes også glidespejlingens **akse** .

Figure 1.1: Bestemmel af aksen for en glidespejling



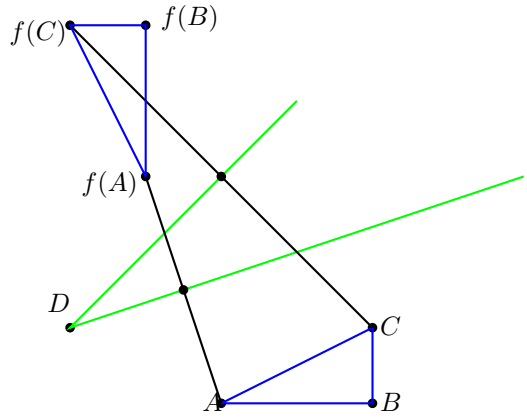
Lad der være givet en glidespejling, f. Så er f^2 en forskydning. Se figur 1.1, Glidespejlingens akse er parallel med denne forskydning. Glidespejlingens akse kan let bestemmes ud fra punktern P, $f(P)$ og $f^2(P)$.

Opgave 22 *I opgave 20 defineres en glidespejling. Hvad er dens akse?*

1.4 Overblik over isometrierne

Af isometrier finder der kun disse fem slags: Identiteten, translationer, drejninger, spejlinger og glidespejlinger. Man kan bestemme en isometri, f, ved at afbilde en passende trekant $\triangle ABC$.

Figure 1.2: Bestemmel centrum for en drejning



- Hvis alle tre punkter afbildes over i sig selv, er isometrien identiteten.
- Billedet, $\triangle f(A)f(B)f(C)$, har samme orientering som $\triangle ABC$.
  - Hvis liniestykkerne $Af(A)$, $Bf(B)$ og $Cf(C)$ er parallelle, så er f en translation.
  - Ellers er f en rotation. Centrum findes som skæringspunktet mellem midtnormalerne for punkterne og deres billeder, for eksempel A og $f(A)$. Se figur 1.2.
- Billedet, $\triangle f(A)f(B)f(C)$, har modsat orientering af $\triangle ABC$. Isometrien f er en spejling eller en glidespejling. Lad l være vinkelhalveringslinien mellem for eksempel linien gennem A og B og linien gennem $f(A)$ og $f(B)$. Afsæt linien l_A parallelt med l gennem $f(A)$ og nedfæld A vinkelret på l_A til fodpunktet F_A. Isometriens akse, m, er midtnormalen til A og F_A.
  - Hvis $F_A = f(A)$ er isometrien spejlingen i m.
  - Ellers er f en glidespejling med akse m og forskydning $\overline{F_A f(A)}$.

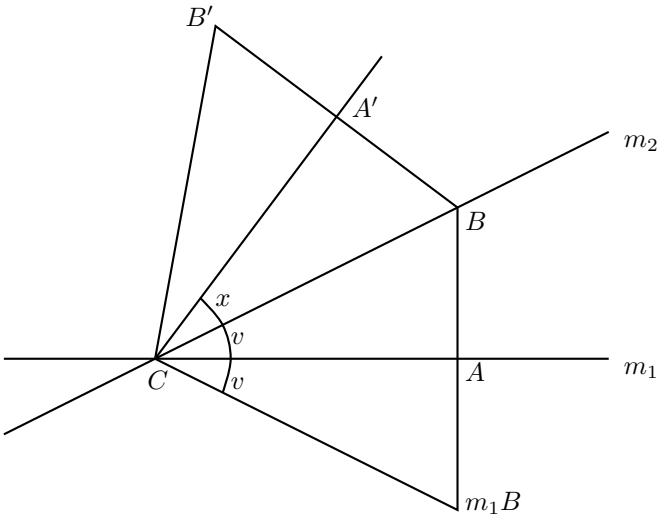
For at vise metoden bevises en sætning, som skal bruges til udledningen af de mulige frisemønstre.

Sætning 1 *Spejling i en linie m_1 efterfulgt af spejling i en linie $m_2 \nparallel m_1$ ikke parallel med m_1 giver en rotation omkring deres skæringspunkt på det dobbelte af vinklen mellem de to linier.*

Bevis: Som punkt C vælges spejlingsliniernes skæringspunkt. Vælg et andet punkt B på m_2, og lad A være projektionen af B vinkelret ned på m_1.

Trekanten $\triangle ABC$ spejles i m_1 over i $\triangle A(m_1B)C$. Ved spejling i m_2 føres trekant $\triangle BCm_1B$ over i $\triangle BCB'$. Trekant $\triangle A'B'C$ har samme orientering som $\triangle ABC$, og C er et fixpunkt; der er tale om en rotation. Liniestykket $A'C$ ligger på spejlingen af m_1 i linien m_2. Derfor er vinklen $x = v$. $\square$

Figure 1.3: Afbildning af ret linie



Opgave 23 *Lad S være spejlingen i en linie m, og R drejningen på $180°$ omkring et punkt C, som ikke ligger på m. Vis at DS er en glidespejling, og angiv aksen og forskydningen.*

1.5 Regneudtryk for isometrierne

Man kan vise at isometrierne kan skrives på én af de to former

$$f(x,y) = (a + cos(v)x - sin(v)y, b + sin(v)x + cos(v)y) \ , \tag{1.6}$$

og

$$f(x,y) = (a + cos(v)x + sin(v)y, b + sin(v)x - cos(v)y) \ . \tag{1.7}$$

Der skal altså to reelle tal $a, b \in \mathbb{R}$ samt en vinkel $v \in S^1$ til at bestemme en isometri. Vinklen er er også et reelt tal, men det er mere korrekt at bruge et punkt på enhedscirklen, S^1, end den uendelige talakse. Så er alle vinkler der giver samme isometri slået sammen til ét punkt på enhedscirklen. Det betyder at $190° + 190° = 20°$.

Opgave 24 *Regn efter at afbildningerne defineret ved (1.6) og (1.7) er isometrier.*

Isometrierne i (1.6) kan være identiteten ($a = b = v = 0$), translationer ($v = 0$); men i alle tilfælde, hvor $v \neq 0$ har isometrien et fixpunkt, og den er en drejning med vinklen v omkring fixpunktet. Ved **identiteten** forstås afbildningen $I(x,y) = (x,y)$.

Isometrierne i (1.7) er spejlinger, hvis

$$a \cos\left(\frac{v}{2}\right) + b \sin\left(\frac{v}{2}\right) = 0 \tag{1.8}$$

Alle de andre isometrier af denne type er glidespejlinger.

Man kan forestille sig familien af isometrier i planen som en tre-dimensionel cylinder - med en dimension mere end en to-dimensionel cylinder. Isometrierne udgør to tre-dimensionelle rum. I det ene udgør planen $v = 0$ translationerne, hvoraf et enkelt punkt er identiteten. I det andet udgør en fladen givet ved (1.8) spejlingerne; resten er glidespejlinger.

Identiteten kan betragtes som en rotation om et hvilket som helst punkt med vinklen $v = 0$. Ordet rotation betyder i disse noter altid en **egentlig rotation**, hvorved man forstår en rotation med $v \neq 0$.

Det tilsvarende gælder for translationer. Identiteten kan betragtes som en translation med voktoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ordet translation betyder i disse noter altid en **egentlig translation**, hvorved man forstår en translation med en vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.

1.6 Facts til hjælp i forståelse af mønstrene

Opgave 25 *(Denne opgave kan løses ved at tegne.) Lad D_v være drejningen med vinklen v omkring Origo, $(0,0)$. Afbildningen $D_v S_y$ er en spejling. Hvad er aksen?*

Opgave 26 *Lad D_1 og D_2 være drejninger med omdrejningspunkterne P og Q og vinklerne v og $-v$ respektive. Hvis $P = Q$, så er $D_1 D_2$ identiteten. Hvis $P \neq Q$, så er $D_1 D_2$ en parallelforskydning.*

Opgave 27 *Lad D_1 og D_2 være drejninger med vinklerne v_1 og v_2 respektive, muligvis omkring forskellige punkter, men hvor $v_1 + v_2 \neq 0$. Vis at $D_1 D_2$ er en drejning med vinklen $v_1 + v_2$. (Opgaven løses lettest analytisk, men geometrisk er også muligt: Start med at konstruere et fixpunkt C for $D_1 D_2$. Beregn den vinkel som centrum for D_2 drejes om C.)*

Opgave 28 *Lad D være en rotation med vinklen v omkring et punkt P, og T en translation med vektoren $\vec{a}$. Vis at afbildningen DTD^{-1} er en translation ved vektoren $D\vec{a}$ (hvilket er vektor $\vec{a}$ drejet vinklen v.) (Opgaven kan løses både geometrisk og analytisk.)*

Opgave 29 *Lad D_1 og D_2 være drejninger med omdrejningspunkterne $P \neq Q$ og vinklerne v_1 og v_2 respektive. Vis at $D_1 D_2 D_1^{-1}$ er en drejning med vinklen v_2. (Opgaven løses lettest analytisk, men geometrisk er også muligt: Start med at konstruere et fixpunkt C for $D_1 D_2$. Beregn den vinkel som centrum for D_2 drejes om C.)*

Sætning 2 *Lad D_1 og D_2 være drejninger med omdrejningspunkterne P og Q og vinklerne $v_1 \neq 0$ og $v_2 \neq 0$ respektive. Hvis*

$$D_1 D_2 = D_2 D_1 \ ,$$

så er $P = Q$.

Bevis Hvis De løste opgave 27 geometrisk er påstanden klar. Her følger et andet bevis. Det er klart, at $D_1(P) = P$ og at $D_2(Q) = Q$. Men der er også tale om

ægte drejninger, som kun har ét fixpunkt. Det betyder, at hvis $D_1(X) = X$, så er $X = P$.

Antag at $D_1D_2 = D_2D_1$. Det giver at $D_1D_2P = D_2D_1P$. Heraf følger at $D_1(D_2P) = D_2P$. Det betyder at punktet D_2P er et fixpunkt for D_1. Altså er $D_2P = P$. Heraf følger $P = Q$.

Sætning 3 *Lad en isomorfi f og et punkt P i planen være givet. Der findes kun ét punkt der afbildes over i P.*

Bevis: Antag at $F(A) = f(B) = P$. Så er

$$|AB| = |f(A)f(B)| = |PP| = 0 \ .$$

Altså er $A = B$.

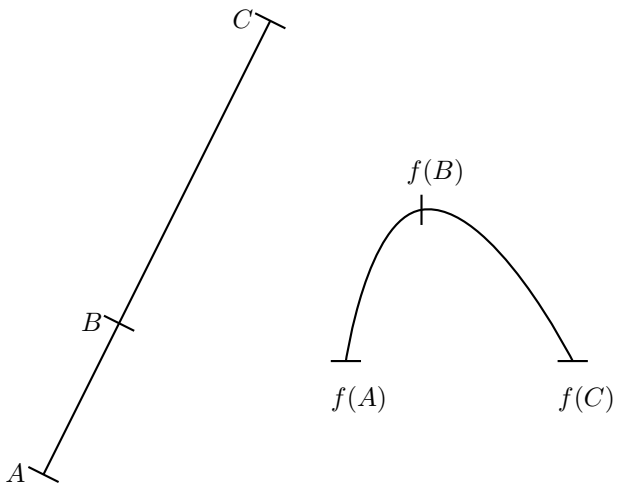
Sætning 3 betyder at enhver isomorfi har en invers afbildning f^{-1}. Ved $f^{-1}(P)$ forstår man løsningen til ligningen $f(X) = P$. En isometri er surjektiv[1]. Derfor har ligningen løsninger. Men sætning 3 betyder, at ligningen højst har én løsning. Lignngen har altså præcis én løsning.

1.7 Udledning af (1.6) og (1.7)

Denne sektion forklarer, hvordan man kan nå frem til at en isometri kan skrives på n af de to former.

Sætning 4 *Ved en isometri afbildes tre punkter på linie over i tre punkter på linie. Derfor afbildes en ret linie over i en ret linie. En trekant over i en kongruent trekant.*

Figure 1.4: Afbildning af ret linie



[1]Det er ret nemt at bevise, men lidt krøllet i tankegangen, så det springes over.

Bevis: Antag at B ligger mellem A og C. Se figur 1.4. Forudsætningen betyder, at

$$|AB| + |BC| = |AC| \ .$$

Så gælder

$$|f(A)F(B)| = |AB| = |AB| + |BC| = |F(A)f(B)| + |F(B)f(C)| \ . \tag{1.9}$$

Formlen kan læses: Vejen fra $f(A)$ til $f(B)$ over punktet $f(C)$ er ikke en omvej. Derfor ligger $f(C)$ på liniestykket gennem $f(A)$ og $f(B)$.

Den anden påstand følger af den første. Til den tredje skal man bruge 1. kongruenssætning. □

Opgave 30 *Forklar hvert lighedstegn i (1.9). Beviset er kun en skabelon. Udfyld de manglende detaljer i beveiset.*

En isometri giver anledning til en afbildning af vektorer. Afsæt en vektor $\vec{a}$ i et vilkårligt punkt A. Kald endepunktet for B. Så defineres

$$\tilde{f}(\vec{a}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} \ . \tag{1.10}$$

Bevis: Ja, definitionen kræver et bevis! Den giver nemlig kun mening, hvis $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ ikke afhænger af det valgte begyndelsespunkt. Se opgave 31.

Opgave 31 *Afsæt en vektor i to forskellige punkter, så vi får to pile $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$. Bevis at billederne ved en isometri bliver parallelle og lige lange. Altså at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Opgave 32 *Beregn billedet af en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ved isometrierne i afsnit 1.2.*

Sætning 5 *Lad en isometri f have vektorafbildningen $\tilde{f}$. Der gælder*

$$\tilde{f}(\vec{a} + \vec{b}) = \tilde{f}(\vec{a}) + \tilde{f}(\vec{b}) \tag{1.11}$$

$$\tilde{f}(k\vec{a}) = k\tilde{f}(\vec{a}) \tag{1.12}$$

Opgave 33 *Tegn situationen i sætning 5, og bevis sætningen. Man skal bruge sætning 4.*

Formen af afbildningen $\tilde{f}$ bestemmes. En vektor kan udtrykkes ved enhedsvektorerne

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

med formlen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} \ .$$

Sætning 5 giver så

$$\tilde{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\tilde{f}(\vec{i}) + y\tilde{f}(\vec{j}) \ . \tag{1.13}$$

Derfor skal man betragte $\tilde{f}(\vec{i})$. Det er en enhedsvektor; derfor har den formen

$$\tilde{f}(\vec{i}) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

for en eller anden vinkel $v \in (S)^1$. Billedet af den anden enhedsvektor $\tilde{f}(\vec{j})$ står vinkelret på $\tilde{f}(\vec{i})$. Det giver to muligheder

$$\tilde{f}(\vec{j}) = \tilde{f}(\vec{i})\hat{} \quad \text{og} \quad \tilde{f}(\vec{j}) = -\tilde{f}(\vec{i})\hat{}\ , \tag{1.15}$$

hvor hatten $\hat{}$ angiver tværvektoren.

Endelig kan man kombinere sig til $f(x, y)$ ved at afsætte $\tilde{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ i punktet $f(0, 0)$, hvis koordinater kaldes $(a, b) = f(0, 0)$.

Opgave 34 *Kombiner resultaterne til (1.6) og (1.7).*

Opgave 35 *Opskriv forskriften for en drejning på* $40°$ *omkring* $(0, 0)$.

Opgave 36 *Opskriv forskriften for en drejning på* $40°$ *omkring* $(4, 3)$.

Opgave 37 *Opskriv forskriften for en spejling i aksen* $3x + 4y - 12 = 0$.

Opgave 38 *Opskriv forskriften for en glidespejling med aksen* $3x + 4y - 12 = 0$ *og forskydning 5 skråt nedad.*

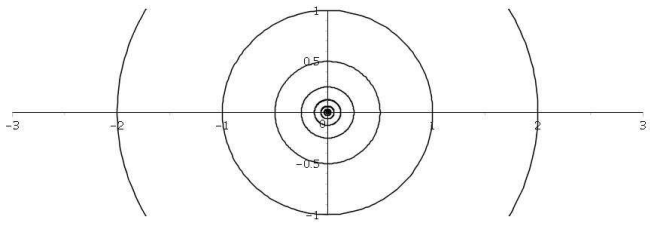
Chapter 2

Symmetrigruppen for et Mønster

2.1 Præcisering af "symmetri"

Betragt figur 2.1. Mønstret består af uendelig mange cirkler med samme centrum og radier $r = 2^n$, hvor $n \in \mathbb{Z}$. Der findes mange isometrier af planen

Figure 2.1: Mønster af cirkler



der fører figuren over i sig selv. Alle rotationer omkring cirklernes fælles centrum, og enhver spejling, hvis akse går gennem centrum. Men mønstret er specielt derved at afbildningen $f(x, y) = (2x, 2y)$ også fører figuren over i sig selv. Denne afbildning, der har fixpunktet $(0, 0)$ og ellers fordobler alle afstande, kaldes en affinitet. Men det er ikke en isometri, så den tager vi ikke med i vores beskrivelse af mønstret.

De symmetrier der er emnet for disse noter, afbilder figurer over i kongruente figurer. En symmetri skal derfor være en isometri. Enhver isometri afbilder en figur over i en kongruent figur, se sætning 4. Altså udgøres symmetrierne præcis af isometrierne.

Dette er en typisk matematisk metode. Et lidt vagt begreb "symmetri" præciseres, her til isometrier. Man finder så frem til alle mulige isometrier, og beviser at der ikke findes flere. Kapitel 1 handlede netop om det. I dette og de følgende kapitler er målet at identificere de forskellige typer af mønstre der findes, og bevise at der ikke findes flere.

Figur 2.2 viser to parallelle linier. Den har mange symmetrier: alle translationer

Figure 2.2: To parallelle linier

parallelt med linierne; alle glidespejlinger med aksen liggende midt mellem de to linier, alle spejlinger med aksen vinkelret på linierne, og endelig alle rotationer på 180° omkring punkter midt mellem de to linier.

Alle de isometrier der afbilder en punktmængde M, på sig selv samler vi i en mængde, kaldet $\mathbf{Sym(M)}$. Det indlysende krav er at f afbilder M ind i sig selv, altså

$$\text{Hvis } P \in M, \text{så gælder } f(P) \in M \ . \tag{2.1}$$

Men man ønsker ikke at punkter uden for M bliver afbildet ind i M. Isometrien skal opfylde

$$\text{Hvis } f(P) \in M, \text{så gælder } P \in M \ . \tag{2.2}$$

De isometrier der opfylder dette, samles i mængden $Sym(f)$. Der gælder følgende

Sætning 6 *Mængden af symmetrier for en punktmængde opfylder følgende betingelser:*

- *Identiteten $I \in Sym(M)$*
- *Hvis $f \in Sym(M)$, så ligger den inverse afbildning $f^{-1} \in Sym(M)$ også i symmetrigruppen.*
- *Hvis $f, g \in Sym(M)$, så ligger den sammensatte afbildning $fg \in Sym(M)$ også i symmetrigruppen.*

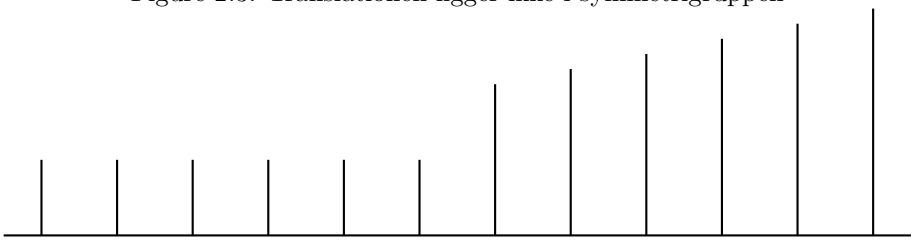
En mægnde af afbildninger, der opfylder Sætning 6, kaldes en **gruppe**. Derfor kaldes $Sym(M)$ symmetrigruppen for M.

Figur 2.3 viser et mønster, hvor en translation opfylder (2.1). Der er en linie med pinde på. Fra en vis pind begynder pindene at blive længere. Men translationen ligger ikke i figurens symmetrigruppe, fordi (2.2) ikke er opfyldt. Faktisk består figurens symmetrigruppe kun af identiteten.

2.2 Begrænsning til diskrete symmetrigrupper

De mønstre der behandles i disse noter, har ikke så mange isometrier i symmetrigruppen som figurerne i figur 2.1 og 2.2. Der bliver sat den begrænsning på symmetrigruppen, at der gælder

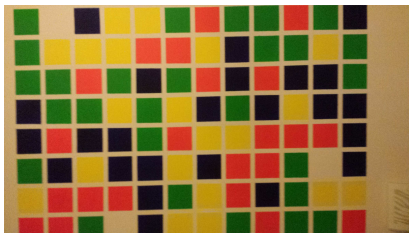
Figure 2.3: Translationen ligger ikke i symmetrigruppen



- Symmetrigruppen indeholder en mindste translation
- Omkring ethvert omdrejningspunkt for rotationer i $Sym(M)$ findes en mindste rotation.

En symmetrigruppe $Sym(M)$ der opfylder disse betingelser kaldes **diskret** . Mønstrene i figur 2.1 og 2.2 er ikke diskrete, og vil derfor ikke blive behandlet yderligere i disse noter[1].

Figure 2.4: Mønster i forfatterens lejlighed



Mønstret i figur 2.4 skal man forestille sig fortsætte i det uendelige. Det føres over i sig selv ved translationerne med vektorerne $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ved en rotation omkring de hvide felter på 90° sker der et farveskifte, blå til grøn til rød til gul til blå. Den slags symmetrier er meget almindelige, men de negligeres i denne gennemgang. Man kan enten opfatte mønstret, så rotationen fører mønstret over i sig selv, eller sådan at den ikke gør det. Det giver to forskellige symmetrigrupper, som begge er lige gyldige.

2.3 Rotationer i en diskret symmetrigruppe

Opgave 39 *Lad M være rektanglet med hjørnerne $(\pm 4, 0)$ og $(0, \pm 4)$. Hvilke isometrier ligger i $Sym(M)$?*

[1] I den modsatte grøft findes mønstre der indeholder samtlige rotationer omkring et punkt C, eller samtlige translationer parallelt med en given linie, l. Det er ret let at udfærdige en liste over de mulige type af sådanne mønstre, men det bibringer intet nyt. Symmetrigrupperne imellem disse yderpunkter har næppe nogen praktisk betydning.

Opgave 40 *Lad M være rektanglet med hjørnerne $(\pm 2, \pm 2)$. Hvilke isometrier ligger i $Sym(M)$?*

Sætning 7 *Lad $Sym(M)$ være en diskret symmetrigruppe for en mængde M, som indeholder rotationer omkring et punkt C. Der findes en mindste vinkel $v = \frac{360^\circ}{n} > 0$, hvor $n \in \mathbb{N}$ er et naturligt tal. Desuden er så alle rotationerne med centrum i C med vinkler som er hele multipla af v.*

Bevis: Der findes en rotation med en mindste vinkel $v > 0^\circ$, fordi symmetrigruppen er diskret. Kald denne rotation for R. Rotationerne R^2, R^3 og så videre drejer vinklerne $v, 2v, \ldots$. Disse vinkler ligger rundt på enhedscirklen, og der er kun afstanden v mellem dem. Man kan ikke få en vinkel mellem 0° og v, fordi v er den mindste vinkel. Derfor må punkterne $v, 2v, \ldots$ på enhedscirklen ramme 0°. Lad R^n være den første rotation, hvis vinkel rammer 0°. Det medfører at $nv = 360^\circ$.

Antag at en rotation R_1 drejer en vinkel u omkring C, og at u ikke er et af punkterne $v, 2v, \ldots$. Så må u ligger mellem to af punkterne $v, 2v, \ldots$ på enhedscirklen. Lad os sige at u ligger mellem $iv < u < (i+1)v$. Subtraher iv fra denne ligning. Det giver at $0 < u - iv < v$. Men isometrien $R^{-i}R_1 \in sym(M)$ ligger i symmetrigruppen, og er en drejning om C med vinklen $u - iv$. Modstrid. $\square$

Opgave 41 *Beviset er værd at lære, for den samme tankegang går igen i beviset for to vigtige sætning, nemlig sætning 10 og 14. Øvelsen går ud på at lære beviset udenad.*

Chapter 3

Rosettemønstre

3.1 Overblik over mønstrene

Rosettemønstrene er mønstre uden translationer. De defineres også som begrænsede mønstre. For et begrænset mønster vil massemidtpunktet afbildes over i sig selv. Derfor kan et begrænset mønster ikke føres over i sig selv ved translationer.

Der findes kun to familier af symmetrigrupper for rosettemønstre. Den første har ikke spejlinger, den anden har. Averys logo hører til den første type, Mercedes' til den anden. Mønstret type bestemmes af den mindste rotation. I begge mønstre ovenfor er den på $120° = \frac{360°}{3}$. Averys logo er af typen $\mathcal{C}_3$, og Mercedes' af typen $\mathcal{D}_3$.

$\mathcal{C}_3$ er navnet for en gruppe ligesom isometrigruppen for Averys logo. Den består af tre elementer, og et af elementerne genererer hele gruppen. Den kaldes **Den cykliske gruppe af orden** 3. Man kan tænke på den som gruppen bestående af rotationen R på $120°$, og R^2 og R^3.

Gruppen $\mathcal{D}_n$ kaldes **diedergruppen** , den består af de isometrier der fører en regulær n-kant over i sig selv. Den består af n drejninger og n spejlinger.

Grupperne $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{D}_1$ indeholder en rotation på $\frac{360°}{1}$, som ikke er en rotation men identiteten. Med sprogbrugen i disse noter indeholder de ingen rotationer.

Man skal skelne mellem symmetrigruppen og Rosettegruppen. Centrummet af Averys logo kan være placeret i Origo $(0, 0)$. Så består symmetrigruppen af rotationer omkring Origo. Hvis centrum er placeret i et andet punkt P består symmetrigruppen af rotationer omkring P. Det er forskellige symmetrigrupper. Men det er samme rosettegruppe.

3.2 Bevis for at der kun findes disse

Rosettegrupperne indeholder ingen translationer.

Sætning 8 *En rosettegruppe kan ikke indeholde en glidespejling.*

Bevis Antag at rosettegruppen indeholder en glidespejling, G. Så indholder den også isomotrien GG. Men GG er en translation.

Opgave 42 *Beviset ovenfor har en bestemt struktur; hvad hedder den type bevis? Hver slutning bruger en sætning/opgave fra noterne. Find de relevante sætninger.*

Sætning 9 *En rosettegruppe kan ikke indeholde rotationer omkring to forskellige centre.*

Bevis Antag at rosettegruppen indeholder rotationer D_1 og D_2 omkring respektive P og $Q \neq P$. Kald rotationsvinklen for D_2 for v. Rosettegruppen indeholder rotationen $D_3 = D_1 D_2 D_1^{-1}$, som drejer vinklen v omkring et punkt $D_1 Q \neq Q$. Deraf følger at rosettegruppen indeholder isomorfien $D_2^{-1} D_3$ som er en translation.

Opgave 43 *Beviset ovenfor har en bestemt struktur; hvad hedder den type bevis? Hver slutning bruger en sætning/opgave fra noterne. Find de relevante sætninger.*

Resultaterne hidtil kan sammenfattes til at Rosettegrupperne kun indeholder spejlinger, og kun rotationer omkring ét punkt.

Opgave 44 *Bevis at rosettegrupperne ikke indeholder spejlinger omkring to parallelle linier.*

Opgave 45 *Bevis, at hvis rosettegrupperne indeholder både rotationer og spejlinger, så går spejlingsakserne gennem ratationernes fælles omdrejningspunkt.*

Nu er det let at indse at der kun findes de angivne rosettegrupper. Antag først at der findes n rotationer, og kald generatoren R. Findes der ikke en spejling, er rosettegruppen $\mathcal{C}_n$.

Findes der en spejling, S med spejlingsakse l, så er RS en spejling omkring linien, som fremkommer ved at dreje linien l vinklen $\frac{360°}{2n}$. Altså findes præcis n spejlinger. Derfor er rosettegruppen $\mathcal{D}_n$.

Opgave 46 *Dokumenter hver slutning i resonnementet ovenfor. Specielt, hvordan vinklen fremkommer, og hvorda man når frem til n spejlinger. Der mangler at blive redegjort for noget!*

3.3 Opgaver

Opgave 47 *Bestem rosettegrupperne for hvert af disse mønstre.*

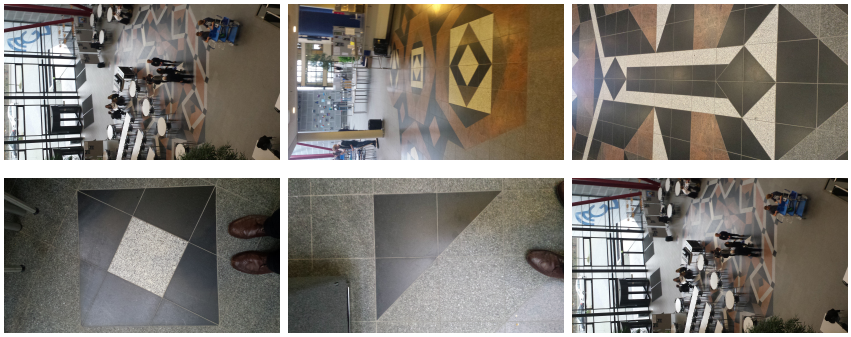
Opgave 48 *Bestem rosettegruppen for hvert bogstav og ciffer, idealiseret så man ikke få* $\mathcal{C}_1$*, hver gang.*

Opgave 49 *På siden*

`http://www.annasromguide.dk/sevaerdigheder/esquilinsev/salfonsoliguorirundgang.html`

er der et billede af en kirkefacade. Af hvilke typer er rosetterne?

Opgave 50 *Bestem rosettegrupperne for hvert af disse mønstre fra stengulvet på Nærum Gymnasium*



Chapter 4

Frisegrupper

4.1 De 7 frisegrupper

Frisegrupperne indholder translationer, som alle er parallelle. Man kan definere dem som typer af symmetrigrupper for mønstre, der er uendligt lange, men begrænsede af to parallelle linier. De er beskrevet på den engelske wikipedi

`http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group`

hvoraf navnene, p1, p1m, p11g, p1m, p2, p2mm og p2mg fremgår, men oversigten på den spanske

`http://es.wikipedia.org/wiki/Friso_(matem%C3%A1ticas)`

er bedre.

Frisegruppernes navne starter med bogstavet "p". Det næste symbol er et af tallene 1 eller 2. Tallet 1 viser, at der ikke findes rotationer; tallet 2 viser at der findes drejninger med vinklen $\frac{360°}{2} = 180°$. Det tredje symbol angiver om der er spejling i akser vinkelret på translationerne, altså lodrette akser. Symbolet "m" angiver at der findes apejlinger i lodrette akser, og "1" at de ikke findes.

Det fjerde symbol angiver på samme måde, om der findes en vandret spejling "m" eller en vandret glidespejling "g". Det med spejlinger og glidespejlinger kræver en forklaring. En frisegruppe med vandrette spejlinger indeholder glidespejlinger, Man angiver et g, hvis glidespejlingen ikke kan skrives som sammensætning af en spejling og en translation i tapetgruppen. Det betyder at den korteste translation fremkommer ved $T = GG$, hvor G er den korteste glidespejling.

Ender navnet på ét eller to 1-taller, skrives de ikke. Frisegruppen p111 skrives blot p1.

4.2 Bevis for at der kun findes disse

4.2.1 Translationernes generator

Frisegrupperne indeholder forskydninger, og alle forskydninger er parallelle. Begrænsningen til diskrete mønstre betyder at der findes en mindste translation,

forskydningen T_a med vektoren $\vec{a}$. Først skal det bevises, at alle translationer er et helt multiplum af denne vektor, altså af formen T^n, som er forskydningen med vektoren $n\vec{a}$, med et helt tal $n \in \mathbb{Z}$. Man siger at translationen T **genererer** alle translationerne, og kalder T for en **generator**.

Opgave 51 *Mønstret afbildes også over i sig selv med translation med vektoren $-\vec{a}$. Hvordan fremstilles den ud fra T? Er den også en generator? Hvad er den præcise definition på ordet generator? Hvorfor er translationen T^2 ikke en generator?*

Sætning 10 *I en frisegruppe er alle translationer et helt multiplum af den korteste translation.*

Opgave 52 *Beviset ligner til forveksling beviset for at alle rotationerne er multipla af den mindste rotation. Gennemfør selv beviset.*

4.2.2 Begrænsing af rotationer og spejlinger

Det næste trin er begrænsning af de mulige rotationer og spejlinger og glidespejlinger. Hertil skal bruges fire facts om translationer og de tre andre typer af isometrier.

Sætning 11 *Lad T være en translation med vektoren $\vec{a}$, og D en drejning med vinklen v. Vis at isometrien DTD^{-1} er en translation med vektoren $D\vec{a}$.*

Sætning 12 *Lad T være en translation med vektoren $\vec{a}$, og S en spejling i en akse, som danner vinklen v med $\vec{a}$. Vis at isometrien STS er en translation med vektoren $D_{2v}\vec{a}$, altså vektor $\vec{a}$ drejet vinklen $2v$.*

I et frisemønster er alle translationerne parallelle med $\vec{a}$. Heraf følger nu, at de eneste mulige drejninger er på 180°, at kun spejlinger i akser parallelt med og vinkelret på $\vec{a}$ er mulige.

Sætning 13 *Lad G være en glidespeling med vektoren $\vec{a}$ parallelt med dens akse. Så er G^2 en translation med vektoren $2\vec{a}$.*

Heraf følger, at eventuelle glidespejlinger har forskydninger af formen $\frac{n}{2}\vec{a}$, hvor $\vec{a}$ er forskydningen af den korteste translation.

Opgave 53 *Bevis sætningerne 11, 12 og 13.*

Opgave 54 *Antag at en frisegruppe indholder en glidespejling, hvis forskydning, $\vec{a}$, er det samme som den korteste translation, T. Bevis at der findes en spejling, S, og at glidespejlingen fremkommer ved kombination af T og S.*

4.2.3 Selve beviset

Ideen er undersøge de mulige kombinationer af spejlinger og drejninger. En eventuelle drejning på 180° betegnes R, en spejling med akse vinkelret på $\vec{a}$ betegnes $S_\perp$, og en spejling parallel med $\vec{a}$ betegnes $S_\parallel$. Det giver principielt 8 kombinationer, se tabel 4.2.3. Man opnår hele frisegruppen ved at tilføje en

korteste glidespejling G, hvis der findes en, eller den mindste translationen T. Hvilken der bruges er angivet under "trans".

$S_\perp$	$S_\parallel$	R	trans	mønster	navn	kommentar
nej	nej	nej	T	F F F F	p1	
nej	nej	nej	G	F ɘ F ɘ	p1g	
nej	nej	ja	T	S S S S	p2	
nej	nej	ja	G	S Ƨ S Ƨ	p2mg	
nej	ja	nej	T/G	E E E E	p11m	T og G giver det samme
ja	nej	nej	T	T T T T	p1m	
ja	nej	nej	G	T ⊥ T ⊥	p2mg	En overraskende drejning
ja	nej	ja	T	T ⊥ T ⊥	p2mg	basis er T ⊥
ja	ja	ja	T/G	8 8 8 8	p2mm	T og G giver det samme

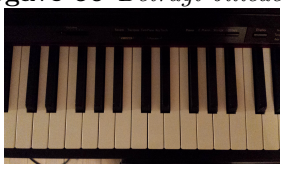
Rækken "nej ja ja" er umulig i følge opgave 23. Og tækken "ja ja nej" er umulig i følge sætning 1. Hvis der findes en en $S_\parallel$, giver T og G den samme gruppe, fordi $G = S_\parallel T$ og $T = S_\parallel G$.

Tilfældet "ja nej ja" er kompliceret. Rotationens centrum kan ikke lige på en spejlingsakse, og derfor findes en glidspejling, G, vinkelret på spejlingsaksen. Translationen fremkommer som $T = GG$.

Opgave 55 *Overbevis dig om at der er tale om samme frisegruppe i de tre tilfælde der er angivet p2mg.*

4.3 Opgaver

Opgave 56 *Betragt billederne*



Hvilke typer er der tale om?

Opgave 57 *Siden*

`http://euler.slu.edu/escher/index.php/Frieze_Patterns`

indleder med fire frisemønstre. Hvilke typer er der tale om?

Chapter 5

tapetgrupper

5.1 De 17 tapetgrupper

Tapetgrupperne indholder translationer i to ikke-parallelle retninger. Det vil blive bevist i næste sektion, antallet af rotationer omkring et punkt er $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Her tælles identiteten med; ordenen $n = 1$ betyder altså at der ingen rotationer findes omkring punktet. Tallet n kaldes **ordenen** af rotationer omkring punktet.

Tapetgrupperne er udmærket forklaret på den engelske wikipædi

`https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group`

I disse noter forklares derfor kun lidt om navngivningen navngivningen og diagrammerne, som viser enhedscellen og et fundamentalområde.

Definition 1 ***Enhedscellen*** *udspændes af to vektorer, den korteste forskydning, og den korteste der ikke er parallel med den første. Hvis der findes en rotation i symmetrigruppen, afsættes vektorerne ud fra et omdrejningspunkt med rotationer af maksimal orden. Hvis der findes en spejling i symmetrigruppen lægges en af dem vandret.*

På illustrationerne i wikipedia er enhedscellerne de farvede parallelogrammer.

Definition 2 *Et* ***fundamentalområde*** *er et område, hvor tegningen i et punkt ikke afhænger af andre i området. Hvis det er muligt, vælges fundamentalområdet sammenhængende.*

På illustrationerne i wikipedia er fundamentalområderne farvet gule.

IUC[1]-navngivningen indeholder fire tegn. Det andet tegn angiver ordenen af den mindste rotation. Det første tegn er enten "p" eller "c". Tegnet "c" kommer fra "cell centered", det stammer fra krystallografi, og angiver at der er et atom i centrum af enhedscellen. Men forfatteren forstår ikke betydningen. Hjælp ønskes. I de fleste tilfælde starter gruppens navn med et "p".

Det tredje symbol angiver om der findes spejlinger; i bekræftigende tilfælde angives et "m" for mirror. Ellers angives et "m", hvis der findes en glidespejling.

[1] International Union of Crystallography

Sådan som enhedscellen tegnes, vil disse spejlinger eller glidespejlinger være vandrette. Findes der ingen spejlinger skrives ingenting, eventuelt et 1-tal for at fylde pladsen ud.

Det fjerde symbol angiver på samme måde, om der findes en lodret spejling eller en lodret glidespejling. Det med spejlinger og glidespejlinger kræver en forklaring. En tapetgruppe med spejlinger indeholder glidespejlinger, og en tapetgruppe med glidespejlinger indeholder også spejlinger. Man angiver et "g", hvis glidespejlingen ikke som sammensætning af spejlinger og andre isometrier i symmetrigruppen.

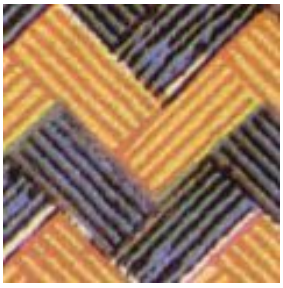
Navnet *p2mm* betyder altså at der findes rotationer på 180°, samt vandrette og lodrette spejlinger, samt at der ikke findes glidespejlinger, der ikke fremkommer af disse.

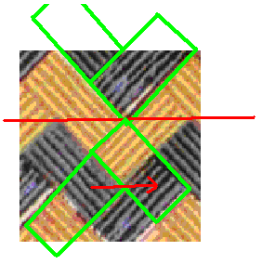
Her følger et skema[2] der kan hjælpe til identifikation af grupperne til man har fået passende rutine. I skemaet angiver order "akse" aksen for en spejling.

n	spejlinger?			
	Ja		Nej	
1	glideakse ≠ akse?		glidespejling?	
	ja: c1m	nej: p1m	ja. p1g	nej: p1
2	vinkelrette akser?			
	ja	nej: p2mg	glidespejling?	
	omdrejningspunkt uden for akse?		ja: p2gg	nej: p2
	ja: c2mm	nej: p2mm		
3	omdrejningspunkt ikke på akse?		p3	
	ja: p31m	nej: p3m		
4	akse drejet 45°?		p4	
	ja: p4mm	nej: p4mg		
6	p6mm		p6	

I visse tilfælde er symmetrierne svære at opdage. For at hjælpe følger en uddybning af fire af eksemplerne fra wikipædien.

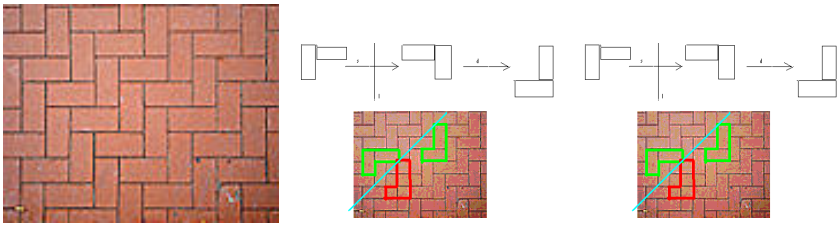
[2] Det er taget fra den engelske vikipædi.





Det svære er nok at overbevise sig om at der ikke er nogen rotationer. Måske trænger hjernen så til pause og løser den nemmere opgave, om der findes spejlinger.

Her kan man overse glidespejlingen langs den lodrette akse.



Udfordringen er nok, at enhedscellen ligger skævt. Hvis murstenen har længden 2, så udspændes enhedscellen af vektorerne $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Men så ved man, hvor man skal lede efter glidespejlingerne. Eller gør man?

5.2 Teori

Der bliver ikke gjort rede for at der kun findes disse 17 tapetgrupper. Der skal en lang, nørklet tankerække til. Men to vigtige resultater bliver bevist.

Det første omhandler translationerne. Tapetgrupperne indeholder forskydninger som ikke er parallelle. Det forholder sig sådan, at der findes to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så enhver forskydningerne er i retningerne

$$m\vec{a} + n\vec{b}\ ,$$

hvor $m, n \in \mathbb{Z}$. Det kan formuleres, således, at gruppen af translationer er genereret af to translationer.

Det andet resultat begrænser de mulige rotationer. Det kaldes den krystallografiske betingelse. Det skyldes at at tilsvarende resultat i tre dimensioner har betydning for de mulige krystalstrukturer. En rotation om et punkt kan være på $60°, 90°, 120°$ og $180°$. De mulige drejningerne genereres af drejninger på $\frac{360°}{n}$, hvor $n = 2, 3, 4, 6$.

Sætning 14 *For en diskret isometrigruppe med ikke-parallelle translationer findes to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så enhver forskydning er i én af retningerne $m\vec{a} + n\vec{b}$, hvor $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Bevis Vælg en korteste forskydningsvektor $\vec{a}$ og en korteste $\vec{b}$, som ikke er parallel med $\vec{a}$. Hvorfor findes de? Afsæt vektorerne $m\vec{a}+n\vec{b}$, hvor $m, n \in \mathbb{Z}$ i $(0, 0)$. Endepunkterne udgør et gitter, hvorved planen deles op i parallelogrammer ud spænd af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Antag nu, at der findes en vektor $\vec{c}$, som ikke ender i et gitterpunkt. Den ender i et af parallelogrammerne. Lad vektorerne til endepunkterne være $m\vec{a} + n\vec{b}$ op til $(m + 1)\vec{a} + (n + 1)\vec{b}$ Men så ligger translationen med vektoren

$$m\vec{a} + n\vec{b} - \vec{c} \text{ og } (m + 1)\vec{a} + (n + 1)\vec{b} - \vec{c}$$

i symmetrigruppen. Men én af dem er kortere end $\vec{b}$.

Sætning 15 *Har en diskret isometrigruppe translationer er de eneste rotationer af orden $n = 1, 2, 3, 4, 6$.*

Bevis Vælg en korteste translation T_1 med forskydningsvektor $\vec{a}$, og en rotation D med vinklen v. Symmetrigruppen indeholder også $T_2 = DT_1D^{-1}$, som er translationen med den drejede vektor $\vec{b} = D\vec{a}$, sætning 11. Derfor indeholder symmetrigruppen translationen $T_1^{-1}T_2$; kald dens forskydningsvektor $\vec{c}$. De tre forskydningsvektorer danner en ligebenet trekant. (Tegn den!). Heraf fremgår det, at hvis $v < 60°$, så er $|\vec{c}| < |\vec{a}|$, hvilket er i modstrid med valget af $\vec{a}$

Altså er $n \leq 6$. Antag at $n = 5$. Så indeholder symmetrigruppen $T_3 = D^2T_1D^{-2}$, som er translationen med den $144°$ drejede vektor $D^2\vec{a}$. Symmetrigruppen indeholder translationen T_1T_3, hvis forskydningsvektor igen viser sig at være kortere end $\vec{a}$. Modstrid. □

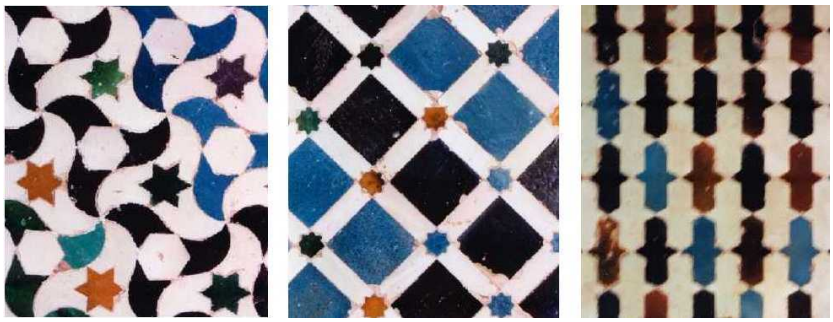
Opgave 58 *Beviserne i dette afsnit er skrevet mere kortfattet end de tidligere. Der er derfor flere detaljer som skal udfyldes af læseren. Opgaven går ud på at øve beviserne, og for hver detalje henvise til den sætning eller den opgave, hvis resultat bliver brugt.*

5.3 Opgaver

Opgave 59 *Læg et papir over forklaringerne på følgende hjemmeside,*

`http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html`

og identificer tapetgrupperne.



Opgave 60 *Bestem tapetgrupperne af de tre mønstre ovenfor fra Al Hambra.*

Opgave 61 *Bestem tapetgruppen af hver af følgende figurer taget fra wikipædien*

Opgave 62 *Bestem tapetgruppen af en fliserlægning og en typisk rist.*

Opgave 63 *Se filmen "The Bourne Ultimatum". Jagten i Tangier krydres med en række mauriske mønstre. Bestem deres symmetrigrupper. Hvordan understøtter udvalget af symmetrigrupper identifikationen med hovedpersonen?*

Opgave 64 *Hvilke af de* 17 *tapetgrupper indeholder glidespejlinger, som ikke fremkommer af translationer og drejninger og spejlinger i symmetrigruppen? (Man skal nok starte med at undersøge sammensætning af en spejling og en drejning, hvis omdrejningspunkt ikke ligger på spejlingens symmetriakse.)*

Index

afbildning, 3
akse
    glidespejling, 6
    spejling, 4

billede, 3

$\mathcal{C}_n$, 16
centrum, 4

$\mathcal{D}_n$, 16
diedergruppen, 16
diskret, 14

egentlig
    rotation, 8
    translation, 8
enhedscelle, 22

fixpunkt, 3
fundamentalområde, 22

generator, 20
generere, 20
glidespejling, 6
gruppe, 13
    cyklisk, 16

identiteten, 8
invers, 4
isometri, 4

krystallografiske betingelse, 25

orden, 22

på, 3

rosettemønster, 16
rotation, 4

sammensætning, 5
surjektiv, 3
Sym, 13

translation, 4