MINDRE FORA END MATRIXGRUPPERNES

NÆRUM GYMNASIUM

1. Indledning

En klasse på 28 elever kan opdeles i 7 grupper à 4 elever. Det kan være at læreren ønsker at eleverne behandler deres emne sammen med resten af eleverne i små fora. Den oplagte løsning er 4 fora à 7 elever på tværs af grupperne, hvilket er det man forstår ved matrixgrupper. I visse tilfælde kan det dog være et alt for stort forum til det videre arbejde. Der findes faktisk mulighed for arbejde med fora der består af 4 elever hver. Hver elev arbejder med alle emner, og hver elev foresidder arbejdet i 2 fora.

Det er en forudsætning, at eleverne ikke skal bruge input fra alle grupperne[1].

Denne artikel giver skemaer for arbejdet i de tilfælde, hvor det er ideelt at arbejde i mindre fora i klasser op til og med 28 elever.

2. Betingelser for mindre fora

For at skemaet kan gå op, skal en række betingelser opfyldes. At skemaet går op betyder, at

I alle deltager i én gruppe,
II alle arbejder i et forum om hvert emne præcis én gang,
III og at der ikke er nogen oversiddere.

I dette arbejde antages det at alle grupperne har samme størrelse, m. Der bruges betegnelserne defineret i dette skema:

n	antallet af elever i klassen
g	antallet af grupper
m	antallet af medlemmer i hver gruppe
f	antallet af medlemmer i hvert forum

Betingelse I betyder

$$n = gm \ ,$$

og betingelse III,

$$f | n \ . \tag{1}$$

Der er $n - m$ elever der skal deltage i et forum om hvert emne, og i hvert forum er der $f - 1$ elever der deltager og ikke foresidder. Derfor kan Betingelse II skrives

$$(f-1) \mid (n-m) = m \cdot (g-1) \ . \tag{2}$$

Denne ligning er trivielt opfyldt, hvis $f = 2$, og hvis $f = m$; det sidste er matrixgrupperne. Disse to tilfælde betegnes som trivielle skemaer.

[1]Forfatteren har brugt metoden til repetition.

Klassestørrelser med ikke trivielle fora

n	g	m	$m\cdot(g-1)$	f	kommentar
15	5	3	2^3	3	
21	7	3	$2\cdot 3^2$	3	Hver elev foresidder 3 gange og deltager 9.
24	8	3	$3\cdot 7$	4	Ubalanceret. Skema ikke udarbejdet
	6	4	$2^2\cdot 5$	4	Ubalanceret. Skema ikke udarbejdet
27	9	3	$3\cdot 2^3$	3	Foraene kræver 12 runder.
28	7	4	$2^3\cdot 3$	4	

Et skema betegnes som balanceret, hvis alle elever er med i lige mange fora. Det betyder at alle elever skal foresidde lige mange fora. Antallet af fora hver gruppe skal foresidde er

$$\frac{m\cdot(g-1)}{f-1}\ .$$

At skemaet er balanceret betyder at antallet af medlemmer i hver gruppe m går op i det tal. Betingelsen kan skrives

$$f-1 \mid g-1\ . \tag{3}$$

Denne betingelse er stærkere end (2). Under betingelsen (3) bliver antallet af runder

$$\frac{f\cdot(g-1)}{f-1}\ . \tag{4}$$

3. Skemaer

I skemaerne bliver eleverne betegnet med et tal for gruppenummeret og et bogstav for at skelne eleverne inden for hver gruppe.

15 elever, 5 grupper, 3 i hvert forum.

$\frac{1a\ 2b}{4c}$	$\frac{2a\ 3b}{5c}$	$\frac{3a\ 4b}{1c}$	$\frac{4a\ 5b}{2c}$	$\frac{5a\ 1b}{3c}$
$\frac{1a\ 5c}{3b}$	$\frac{2a\ 1c}{4b}$	$\frac{3a\ 2c}{5b}$	$\frac{4a\ 3c}{1b}$	$\frac{5a\ 4c}{2b}$
$\frac{3b\ 4c}{1a}$	$\frac{4b\ 5c}{2a}$	$\frac{5b\ 1c}{3a}$	$\frac{1b\ 2c}{4a}$	$\frac{2b\ 3c}{5a}$

Skemaet læses således, at eleverne $1a$, $2b$ og $4c$ deltager i samme forum i to runder, hvor henheldsvis $1a$ og $2b$ foresidder.

21 elever, 7 grupper, 3 i hvert forum.

$\frac{1a\ 2b}{3c}$	$\frac{2a\ 3b}{4c}$	$\frac{3a\ 4b}{5c}$	$\frac{4a\ 5b}{6c}$	$\frac{5a\ 6b}{7c}$	$\frac{6a\ 7b}{1c}$	$\frac{7a\ 1b}{2c}$
$\frac{1a\ 3b}{6c}$	$\frac{2a\ 4b}{7c}$	$\frac{3a\ 5b}{1c}$	$\frac{4a\ 6b}{2c}$	$\frac{5a\ 7b}{3c}$	$\frac{6a\ 1b}{4c}$	$\frac{7a\ 2b}{5c}$
$\frac{1a\ 6c}{4b}$	$\frac{2a\ 7c}{5b}$	$\frac{3a\ 1c}{6b}$	$\frac{4a\ 2c}{7b}$	$\frac{5a\ 3c}{1b}$	$\frac{6a\ 4c}{2b}$	$\frac{7a\ 5c}{3b}$
$\frac{7c\ 4b}{1a}$	$\frac{1c\ 5b}{2a}$	$\frac{2c\ 6b}{3a}$	$\frac{3c\ 7b}{4a}$	$\frac{4c\ 1b}{5a}$	$\frac{5c\ 2b}{6a}$	$\frac{6c\ 3b}{7a}$
$\frac{5c}{1a\ 4b}$	$\frac{6c}{2a\ 5b}$	$\frac{7c}{3a\ 6b}$	$\frac{1c}{4a\ 7b}$	$\frac{2c}{5a\ 1b}$	$\frac{3c}{6a\ 2b}$	$\frac{4c}{7a\ 3b}$

I sidste runde er de tre elever kun sammen i ét forum.

27 elever, 9 grupper, 3 i hvert forum.

$\frac{1a\ 2b}{3c}$	$\frac{2a\ 3b}{4c}$	$\frac{3a\ 4b}{5c}$	$\frac{4a\ 5b}{6c}$	$\frac{5a\ 6b}{7c}$	$\frac{6a\ 7b}{8c}$	$\frac{7a\ 8b}{9c}$	$\frac{8a\ 9b}{1c}$	$\frac{9a\ 1b}{2c}$
$\frac{1a\ 4b}{7c}$	$\frac{2a\ 5b}{8c}$	$\frac{3a\ 6b}{9c}$	$\frac{4a\ 7b}{1c}$	$\frac{5a\ 8b}{2c}$	$\frac{6a\ 9b}{3c}$	$\frac{7a\ 1b}{4c}$	$\frac{8a\ 2b}{5c}$	$\frac{9a\ 3b}{6c}$
$\frac{1a\ 6c}{5b}$	$\frac{2a\ 7c}{6b}$	$\frac{3a\ 8c}{7b}$	$\frac{4a\ 9c}{8b}$	$\frac{5a\ 1c}{9b}$	$\frac{6a\ 2c}{1b}$	$\frac{7a\ 3c}{2b}$	$\frac{8a\ 4c}{3b}$	$\frac{9a\ 5c}{4b}$
$\frac{1a\ 9c}{7b}$	$\frac{2a\ 1c}{8b}$	$\frac{3a\ 2c}{9b}$	$\frac{4a\ 3c}{1b}$	$\frac{5a\ 4c}{2b}$	$\frac{6a\ 5c}{3b}$	$\frac{7a\ 6c}{4b}$	$\frac{8a\ 7c}{5b}$	$\frac{9a\ 8c}{6b}$
$\frac{7b\ 5c}{1a}$	$\frac{8b\ 6c}{2a}$	$\frac{9b\ 7c}{3a}$	$\frac{1b\ 8c}{4a}$	$\frac{2b\ 9c}{5a}$	$\frac{3b\ 1c}{6a}$	$\frac{4b\ 2c}{7a}$	$\frac{5b\ 3c}{8a}$	$\frac{6b\ 4c}{9a}$
$\frac{8b\ 3c}{1a}$	$\frac{9b\ 4c}{2a}$	$\frac{1b\ 5c}{3a}$	$\frac{2b\ 6c}{4a}$	$\frac{3b\ 7c}{5a}$	$\frac{4b\ 8c}{6a}$	$\frac{5b\ 9c}{7a}$	$\frac{6b\ 1c}{8a}$	$\frac{7b\ 2c}{9a}$

28 elever, 7 grupper, 4 i hvert forum.

$\frac{2b\ 3c}{1a\ 4d}$	$\frac{3b\ 4c}{2a\ 5d}$	$\frac{4b\ 5c}{3a\ 6d}$	$\frac{5b\ 6c}{4a\ 7d}$	$\frac{6b\ 7c}{5a\ 1d}$	$\frac{7b\ 1c}{6a\ 2d}$	$\frac{1b\ 2c}{7a\ 3d}$
$\frac{4b\ 6c}{1a\ 2d}$	$\frac{5b\ 7c}{2a\ 3d}$	$\frac{6b\ 1c}{3a\ 4d}$	$\frac{7b\ 2c}{4a\ 5d}$	$\frac{1b\ 3c}{5a\ 6d}$	$\frac{2b\ 4c}{6a\ 7d}$	$\frac{3b\ 5c}{7a\ 1d}$
$\frac{1a\ 5d}{2b\ 4c}$	$\frac{2a\ 6d}{3b\ 5c}$	$\frac{3a\ 7d}{4b\ 6c}$	$\frac{4a\ 1d}{5b\ 7c}$	$\frac{5a\ 2d}{6b\ 1c}$	$\frac{6a\ 3d}{7b\ 2c}$	$\frac{7a\ 4d}{1b\ 3c}$
$\frac{1a\ 7d}{3b\ 5c}$	$\frac{2a\ 1d}{4b\ 6c}$	$\frac{3a\ 2d}{5b\ 7c}$	$\frac{4a\ 3d}{6b\ 1c}$	$\frac{5a\ 4d}{7b\ 2c}$	$\frac{6a\ 5d}{1b\ 3c}$	$\frac{7a\ 6d}{2b\ 4c}$

Meget inspiration er fundet i [1]. Alle skemaerne er fundet med den samme metode; den forklares i tilfældet $n = 15$. Det forsøges først at konstruere fora, hvor 2 elever skiftes til at foresidde. Beregningerne bliver nemmere, hvis grupperne nummereres 0 til 4. Eleverne betegnes $0a, 0b, 0c, 1a, \ldots, 4c$. Der stipuleres et udgangspunkt $\frac{0a\ 1b}{rc}$ for runde 1, hvor resten fremgår ved successiv forøgelse af tallene. For de sidste to runder stipuleres udgangspunkter $\frac{0a\ sc}{tb}$ og $\frac{xb\ yc}{0a}$.

Man kan nu aflæse, at $0a$ er deltager foresiddet af grupperne $1, s, x, y$; derfor skal triplen (s, x, y) være en permutation af tallene $\{2, 3, 4\}$.

Det ses, at $0b$ er deltager i fora foresiddet af

$$\{-1, -t, s-t, y-x\} = -\{1, t, t-s, x-y\} \ ,$$

alle regnestykker foretaget modulo 5. Tilsvarende fremgår det at $0c$ deltager i fora foresiddet af

$$\{-2, -1, -s, x-y\} = -\{1, 2, s, y-x\} \ .$$

Man lader nu en computer gennemløbe permutationerne givende værdier til $s, x,$ og y. Mest praktisk er det nok at lade en løkke gennemløbe alle værdier af r og t og for hvert par beregne mængderne ovenfor. Hvis begge mængder er lig $\{1, 2, 3, 4\}$, printes parametrene. Man finder løsninger og kan så opskrive et skema.

References

[1] Ian Anderson. *Combinatorial Designs and Tournaments*. Oxford University Press, 1997.